Демонстрационный вариант

2-й части комплексной независимой диагностики по математике для педагогических работников, реализующих образовательные программы среднего общего образования

Пояснение к демонстрационному варианту

Демонстрационный вариант предназначен для проведения 2-ой части комплексной независимой диагностики по математике для учителей, преподающих в 10-11 классах (далее – 2-я часть комплексной диагностики по математике) и направлен на оценку сформированности умения объективно оценивать ответы на задания с развернутым ответом контрольных измерительных материалов (далее – КИМ) в форме единого государственного экзамена (далее – ЕГЭ) по математике с помощью метода балльно-критериальной оценки.

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность ознакомиться со структурой 2-й части комплексной диагностики по математике, количеством заданий, с их формой и уровнем сложности.

В демоверсии представлены образы изображений с ответами на задания с развернутым ответом КИМ в форме ЕГЭ по математике, критерии оценивания выполнения заданий и эталонные баллы оценивания ответов.

Инструкция по выполнению работы

Продолжительность комплексной диагностики составляет 60 минут: 15 минут отводится на ознакомление с критериями оценивания, 45 минут – на выполнение работы.

2-я часть комплексной диагностики по математике проводится в компьютерной форме.

Каждый вариант 2-ой части комплексной диагностики по математике включает:

- 2 работы с развернутыми ответами на задания;
- 7 заданий КИМ в формате ЕГЭ по математике;
- 7 критериев оценивания заданий КИМ в форме ЕГЭ по математике, утвержденных ФГБНУ «ФИПИ».

Участнику комплексной диагностики необходимо оценить представленные работы в соответствии с критериями.

При проведении 2-й части комплексной диагностики по математике разрешены к использованию следующие дополнительные средства и материалы: непрограммируемый калькулятор.

Оценивание представленных работ осуществляется с помощью метода балльно-критериальной оценки, при котором каждому из содержательных критериев соответствует определенный балл.

Ответом на задание 2-й части комплексной диагностики является цифра, количество баллов по каждому критерию, соответствующее позиции оценивания выполнения задания, выставленное участником комплексной диагностики по математике за представленные работы.

Ответы записываются в виде цифры в специальное поле для ответов «Балл»/«Ответ отсутствует», соответствующее позиции оценивания выполнения задания, ответ на который был внесен/не внесен в бланк ответов.

Важно! Если ответ на задание отсутствует в изображении бланка, то необходимо поставить знак «X» в соответствующее поле для ответов «Ответ отсутствует».

<u>Пример оформления ответа:</u>

Задания/Критерии	**Балл**	**Ответ отсутствует**
1	2	
2		X

Часть № 2

<u>Задание для участника 2-й части комплексной диагностики по математике:</u>

оцените представленные работы на основе критериев оценивания, приведенных ниже, и внесите поставленный балл в поле для ответов.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{5\cos 2x-\sin x-2}{25\cos^2 x-16}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.

Решение.

а) Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}5\cos 2x-\sin x-2=0,\\ 25\cos^2 x-16\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}10\sin^2 x+\sin x-3=0,\\ \cos^2 x\neq \dfrac{16}{25}.\end{cases}$$

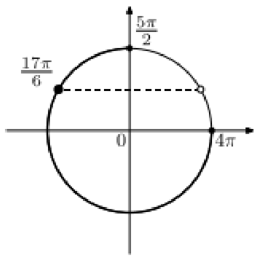
Получаем:

$$\begin{cases}\sin x=-\dfrac{3}{5},\\ \cos^2 x\neq \dfrac{16}{25}\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \cos^2 x\neq \dfrac{16}{25}.\end{cases}$$

При $\sin x=-\dfrac{3}{5}$ не выполнено условие $\cos^2 x\neq\dfrac{16}{25}$.

При $\sin x=\dfrac{1}{2}$ выполнено условие $\cos^2 x\neq\dfrac{16}{25}$, откуда $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.



Получим число $\dfrac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{17\pi}{6}$.

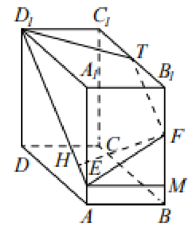
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $A_1E:EA=3:1$, точка T — середина ребра B_1C_1. Длины рёбер AD и AA_1 равны 12 и 16 соответственно.

а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ETD_1, если $AB=3\sqrt{7}$.

Решение.



а) В плоскости BCC_1 проведём через точку T прямую, параллельную D_1E. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Четырёхугольник $EFTD_1$ — сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ETD_1.

В четырёхугольнике $EFTD_1$ стороны D_1E и TF параллельны. Из подобия треугольников D_1A_1E и TB_1F следует, что $D_1E:TF=D_1A_1:TB_1=2$. Следовательно, четырёхугольник $EFTD_1$ является трапецией.

Так как $A_1E:EA=3:1$ и $AA_1=16$, получаем: $A_1E=12$, а $AE=4$. В треугольнике D_1A_1E стороны A_1E и A_1D_1 равны 12. Из подобия треугольников D_1A_1E и TB_1F получаем, что $B_1F=TB_1=6$.

Отметим на отрезке FB точку M так, чтобы отрезки EM и AB были параллельны, тогда $MB=EA=4$, а $FM=6$.

Прямоугольные треугольники EMF и D_1C_1T равны по двум катетам, значит, гипотенузы D_1T и EF равны.

В трапеции $EFTD_1$ боковые стороны D_1T и EF равны, следовательно, трапеция $EFTD_1$ равнобедренная.

б) В прямоугольном треугольнике EFM найдём гипотенузу:

$$EF=\sqrt{FM^2+EM^2}=3\sqrt{11}.$$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике D_1A_1E найдём гипотенузу:

$$D_1E=A_1D_1\cdot\sqrt{2}=12\sqrt{2}.$$

Из подобия треугольников D_1A_1E и TB_1F получаем: $TF=6\sqrt{2}$.

В равнобедренной трапеции $EFTD_1$ проведём высоту FH, тогда

$$HE=\frac{D_1E-TF}{2}=3\sqrt{2}.$$

В прямоугольном треугольнике EFH найдём катет:

$$FH=\sqrt{FE^2-HE^2}=9.$$

Площадь трапеции $EFTD_1$ равна

$$\frac{TF + D_1E}{2} \cdot FH = 81\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $81\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $6^{-\frac{2}{x}} + 5 \geq 6^{\frac{x-1}{x}}$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство: $6^{-\frac{2}{x}} - 6^{1-\frac{1}{x}} + 5 \geq 0$; $6^{-\frac{2}{x}} - 6 \cdot 6^{-\frac{1}{x}} + 5 \geq 0$.

Пусть $6^{-\frac{1}{x}} = y$, тогда данное неравенство принимает вид:

$$y^2 - 6y + 5 \geq 0;\ (y-1)(y-5) \geq 0,\ \text{откуда}\ y \leq 1\ \text{или}\ y \geq 5.$$

При $y \leq 1$ получим: $6^{-\frac{1}{x}} \leq 1$; $-\frac{1}{x} \leq 0$, откуда $x > 0$.

При $y \geq 5$ получим: $6^{-\frac{1}{x}} \geq 5$; $-\frac{1}{x} \geq \log_6 5$; $\frac{1 + (\log_6 5)x}{x} \leq 0$, откуда $-\frac{1}{\log_6 5} \leq x < 0$.

Ответ: $[-\log_5 6; 0)$; $(0; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $-\log_5 6$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 23 % в конце каждого года из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма S.

На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 20 %, т. е. увеличивается в $1{,}2$ раза. Через три года сумма на вкладе «А» будет равна $1{,}2^3 S = 1{,}728S$.

На вкладе «Б» сумма через три года будет равна

$1{,}23^2\left(1 + \frac{n}{100}\right)S = 1{,}5129\left(1 + \frac{n}{100}\right)S$, где n — натуральное число процентов за третий год.

За три года вклад «Б» выгоднее вклада «А», следовательно,

$$1{,}5129\left(1 + \frac{n}{100}\right)S > 1{,}728S;$$

$$n > 100 \cdot \frac{17280 - 15129}{15129} = 100 \cdot \frac{2151}{15129} = 14\frac{366}{1681}.$$

Наименьшее целое число процентов по вкладу «Б» — 15.

Ответ: 15.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

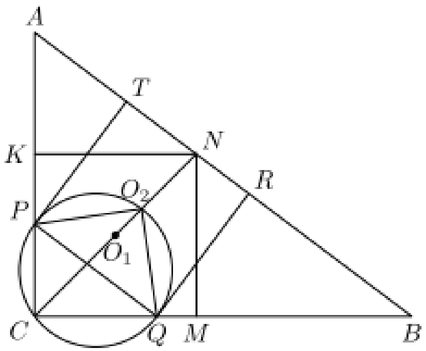
16 В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $KCMN$ так, что вершины K и M расположены на катетах AC и BC соответственно, а на гипотенузе AB — вершина N. Вершины квадрата $TPQR$ расположены на сторонах треугольника ABC, причём вершины P и Q находятся на катетах AC и BC соответственно, а вершины R и T — на гипотенузе AB.

а) Докажите, что точка N и центры квадратов $KCMN$ и $TPQR$ лежат на одной прямой.

б) Найдите длину стороны квадрата $TPQR$, если $AC=\sqrt{2}$ и $BC=2\sqrt{2}$.

Решение.

а) Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов $KCMN$ и $TPQR$ соответственно. Поскольку точка O_1 принадлежит диагонали CN квадрата $KCMN$, точки N и O_1 лежат на биссектрисе угла ACB.



Углы PCQ и PO_2Q прямые, значит, точки P, C, Q, O_2 лежат на окружности с диаметром PQ. Треугольник PO_2Q равнобедренный, так как O_2 — центр квадрата $TPQR$. Вписанные в окружность острые углы PCO_2 и QCO_2 равны, так как опираются на равные хорды ($PO_2=QO_2$), поэтому точка O_2 также лежит на биссектрисе угла ACB. Следовательно, точки C, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

б) Пусть сторона квадрата $TPQR$ равна x, а $\angle BAC=\alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=2$.

Из прямоугольных треугольников ATP и BRQ получаем, что:

$$AT=\frac{x}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}x,\ BR=x\cdot\operatorname{tg}\alpha=2x.$$

Из равенства

$$\sqrt{10}=AB=AT+TR+BR=\frac{1}{2}x+x+2x=\frac{7}{2}x$$

находим, что $x=\frac{2\sqrt{10}}{7}$.

Ответ: б) $\frac{2\sqrt{10}}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$2a(a-5)-3(a-5)\left(3^x+1\right)\le\left(3x^2-6x\right)\left(3^x+1\right)-2ax^2+4ax$$

имеет хотя бы одно решение на промежутке $[-1;0)$.

Решение.

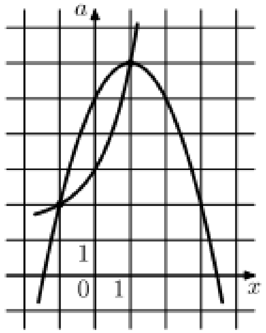
Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$2a(a-5)-3(a-5)\left(3^x+1\right)-\left(3x^2-6x\right)\left(3^x+1\right)+2ax^2-4ax\le 0;$$

$$(a-5)\left(2a-3\left(3^x+1\right)\right)-3\left(x^2-2x\right)\left(3^x+1\right)+2a\left(x^2-2x\right)\le 0;$$

$$\left(2a-3\left(3^x+1\right)\right)\left(a+x^2-2x-5\right)\le 0.$$

Построим графики функций $a=\frac{3}{2}\left(3^x+1\right)$ и $a=-x^2+2x+5$ на плоскости xOa.



Общие точки графиков — $(-1;2)$ и $(1;6)$ (проверяется подстановкой в уравнения $a=\frac{3}{2}\left(3^x+1\right)$ и $a=-x^2+2x+5$).

Больше двух общих точек у графиков быть не может.

При $x\in[-1;0)$ получаем область, ограниченную графиками $a=\frac{3}{2}\left(3^x+1\right)$, $a=-x^2+2x+5$ и $x=0$ (без точек прямой $x=0$). Координаты всех точек этой области удовлетворяют неравенству $\left(2a-3\left(3^x+1\right)\right)\left(a+x^2-2x-5\right)\le 0$.

На промежутке $[-1;0)$ есть решения неравенства тогда и только тогда, когда $2\le a<5$.

Ответ: $2\le a<5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=5$ или исключением точки $a=2$	3
В решении верно найдены граничные точки множества значений a ($a=2$, $a=5$), но неверно определены промежутки значений a. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно найдена хотя бы одна из граничных точек множества значений a: $a=2$ или $a=5$. ИЛИ Задача верно сведена (аналитически или графически) к исследованию взаимного положения графиков функций $a=\frac{3}{2}\left(3^x+1\right)$ и $a=-x^2+2x+5$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Пусть $\{a_n\}$ — последовательность натуральных чисел. Обозначим $M_{<C}(a_n)$ среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые меньше некоторого числа C, которое больше наименьшего, но не больше наибольшего члена этой последовательности. Обозначим $M_{\geq C}(a_n)$ — среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$, которые не меньше числа C. Среднее арифметическое одного числа равно самому числу. К каждому члену последовательности $\{a_n\}$ прибавили 5. Получилась новая последовательность, которую обозначим $\{a_n+5\}$.

а) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<59}(a_n+5)<M_{<59}(a_n)$?

б) Существует ли последовательность $\{a_n\}$, состоящая из трёх членов, для которой $M_{<59}(a_n+5)<M_{<59}(a_n)$ и $M_{\geq 59}(a_n+5)<M_{\geq 59}(a_n)$?

в) Известно, что среднее арифметическое всех членов последовательности $\{a_n\}$ равняется 59, $M_{\geq 59}(a_n)=67$, $M_{<59}(a_n)=51$, $M_{\geq 59}(a_n+5)=70$ и $M_{<59}(a_n+5)=55$. Какое наименьшее число членов может быть в последовательности $\{a_n\}$?

Решение.

а) Пусть $\{a_n\}=\{2;56;100\}$ и $\{a_n+5\}=\{7;61;105\}$, тогда

$$M_{<59}(a_n+5)=7<M_{<59}(a_n)=\frac{56+2}{2}=29.$$

б) В пункте *а* приведён пример последовательности $\{a_n\}=\{2;56;100\}$, для которой $\{a_n+5\}=\{7;61;105\}$ и $M_{<59}(a_n+5)=7<M_{<59}(a_n)=\frac{56+2}{2}=29$, при этом

$$M_{\geq 59}(a_n+5)=\frac{105+61}{2}=83<M_{\geq 59}(a_n)=100.$$

в) Пусть в последовательности $\{a_n\}$ N чисел, среди них m чисел не меньше 59, а в последовательности $\{a_n+5\}$ ровно k чисел, которые не меньше 59. Среднее арифметическое выросло на 5 и составило 64. Имеем два уравнения:

$$59N=67m+51(N-m) \text{ и } 64N=70k+55(N-k),$$

откуда $8N=16m$, то есть $N=2m$, и $9N=15k$, то есть $3N=5k$. Поэтому N делится и на 2, и на 5, то есть делится на 10. Таким образом, $N\geq 10$.

Покажем, что N может равняться 10. Пусть в последовательности $\{a_n\}$ четыре числа равны 50, одно число равно 55 и пять чисел равны 67. Тогда все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Бланки ответов:

ВНИМАНИЕ! Все бланки и контрольные измерительные материалы рассматриваются в комплекте

№12

а) $\dfrac{5\cos 2x - \sin x - 2}{25\cos^2 x - 16} = 0$

Усл.: $25\cos^2 x - 16 \neq 0$

$25\cos^2 x \neq 16$

$\cos^2 x \neq \frac{16}{25}$

$5\cos 2x - \sin x - 2 = 0$

$5(1 - 2\sin^2 x) - \sin x - 2 = 0$

Пусть $\sin x = t$, тогда

$5(1 - 2t^2) - t - 2 = 0$

$10t^2 + t - 3 = 0$

$D = 1 + 4\cdot 3\cdot 10 = 121 = 11^2$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 11}{20}$

$t_1 = -\frac{3}{5}$; $t_2 = \frac{1}{2}$

Тогда, $\sin x = -\frac{3}{5}$ или $\sin x = \frac{1}{2}$

Но, если $\sin x = -\frac{3}{5}$, то $\sin^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$

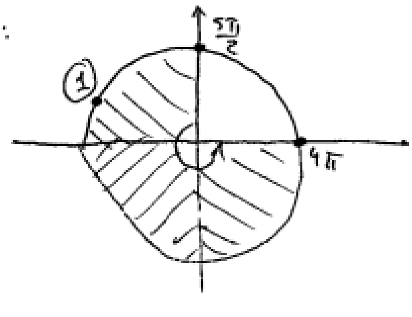
$\Rightarrow$ корни при $\sin x = -\frac{3}{5}$ не подходят

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

б) $\left[\frac{5\pi}{2}, 4\pi\right]$

1) Изобразим корни на тригонометрическом круге:



2) Найдём корни:

① $\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$

Ответ: $\frac{17\pi}{6}$.

№14

$6^{-\frac{2}{x}} + 5 \geqslant 6^{\frac{x-1}{x}}$, $x \neq 0$

$\frac{1}{(6^{\frac{1}{x}})^2} + 5 \geqslant \frac{6}{6^{\frac{1}{x}}}$

Пусть $6^{\frac{1}{x}} = t$; $t > 0$, тогда

$\frac{1}{t^2} + 5 \geqslant \frac{6}{t}$

$\frac{1 + 5t^2 - 6t}{t^2} \geqslant 0$

Найдём нули функции и выколотые точки

$t^2 \neq 0$, $t \neq 0$

$5t^2 - 6t + 1 = 0$

$a + b + c = 0 \Rightarrow$

$t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{5}$

Нанесём точки на прямую.

Тогда, $\begin{cases} t > 0 \\ \left[\begin{array}{l} t \leqslant \frac{1}{5} \\ t \geqslant 1 \end{array}\right. \end{cases}$

Подставим $6^{\frac{1}{x}} = t$ и решим систему:

(*)

(*) $\begin{cases} 6^{\frac{1}{x}} > 0 \\ \left[\begin{array}{l} 6^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{1}{5}; \\ 6^{\frac{1}{x}} \geqslant 1; \end{array}\right. \end{cases}$, $\left[\begin{array}{ll} 6^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{1}{5} & (1) \\ 6^{\frac{1}{x}} \geqslant 1 & (2) \end{array}\right.$

(1) $6^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{1}{5}$

$6^{\frac{1}{x}} \leqslant 6^{\log_6 \frac{1}{5}}$

$\frac{1}{x} \leqslant \log_6 \frac{1}{5}$

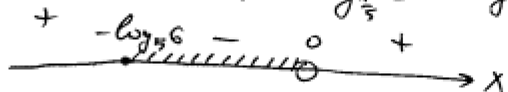
$\frac{1 - x \cdot \log_6 \frac{1}{5}}{x} \leqslant 0$

Найдём нули функц. и нанесём точки на прямую:

$x \neq 0$, $1 - x \log_6 \frac{1}{5} = 0$

$x \log_6 \frac{1}{5} = 1$

$x = \log_{\frac{1}{5}} 6 = -\log_5 6$



$\Rightarrow x \in [-\log_5 6; 0)$

(2) $6^{\frac{1}{x}} \geqslant 1$; $6^{\frac{1}{x}} \geqslant 6^0$, $\frac{1}{x} \geqslant 0$

$x > 0$

$\left[\begin{array}{l} x \in [-\log_5 6; 0) \\ x > 0 \end{array}\right.$ $x \in [-\log_5 6, 0), (0, +\infty)$

Ответ: $[-\log_5 6; 0); (0, +\infty)$

№15.

Пусть S – тело вклада;

S_{A_1}, S_{A_2}, S_{A_3} – остатки к концу года после начисл. процентов в банке „А"

$S_{Б_1}$, $S_{Б_2}$, $S_{Б_3}$ – ост. к концу год. после начисл. процентов в банке „Б"

Пусть k – коэф. прироста в банке „Б" в 3-ий год

$k = 1 + r \cdot 0{,}01$, где r – ставка в 3-ий год (искомое число)

Составим мат. модель для банков „А" и „Б":

„А"

	тело	%	ост.
1 год	S	$+ r_A S$	$= S_{A_1}$
2 год	S_{A_1}	$+ r_A S_{A_1}$	$= S_{A_2}$
3 год	S_{A_2}	$+ r_A \cdot S_{A_2}$	$= S_{A_3}$

„Б"

	тело	%	ост
1 год	S	$+ r_Б S$	$= S_{Б_1}$
2 год	$S_{Б_1}$	$+ r_Б S_{Б_1}$	$= S_{Б_2}$
3 год	$S_{Б_2}$	$+ r S_{Б_2}$	$= S_{Б_3}$ [$r_Б$ поменяли на r (по усл.)]

(*)

Ставки:

$r_A = 0{,}01 \cdot 20\% = 0{,}2$ (банк „А")

$r_Б = 0{,}01 \cdot 23\% = 0{,}23$ (банк „Б")

(*) Выразим остатки на 3-ий год во обоих банках:

„А": $S_{A_1} = (1+0{,}2)S = 1{,}2S$

$S_{A_2} = 1{,}2^2 S$; $S_{A_3} = 1{,}2^3 S$

„Б": $S_{Б_1} = (1+0{,}23)S = 1{,}23S$

$S_{Б_2} = 1{,}23^2 S$

$S_{Б_3} = 1{,}23^2 S \cdot (1+r) = 1{,}23^2 S k$

Составим неравенство

$S_{Б_3} > S_{A_3}$, $1{,}23^2 S k > 1{,}2^3 S$

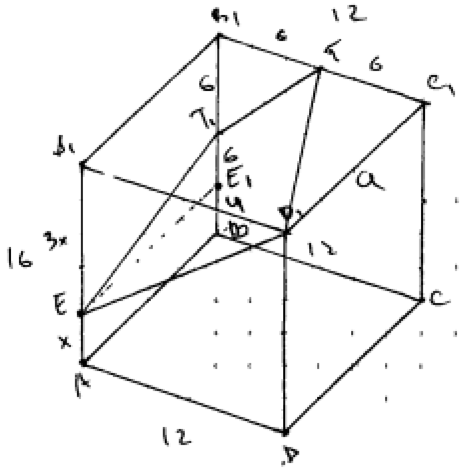
$1{,}5129 \cdot k > 1{,}728$

$k \cdot 5043 > 5760$

Тогда $k = 1{,}15$ – минимальное при котором $r = 15 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Ответ: 15

№13



а) 1) Пусть $EA = x$, тогда $EA_1 = 3x$ (по усл)

$\Rightarrow EA + EA_1 = 4x = 16$ (по усл) $\Rightarrow x = 4$

$\Rightarrow EA = 4$, $EA_1 = 12$

2) Для построения сечения парал. перенесём ED_1 в точку T и проведём до пересеч BB_1: $BB_1 \cap TT_1 = T_1$, тогда ET_1TD_1 – искомое сечение.

3) В $\triangle EA_1D_1$: $tg\angle A_1D_1E = \frac{EA_1}{A_1D_1} = 1$ ($\triangle EA_1D_1$ – прямоуг, т.к. $\angle EA_1D_1 = 90°$)

4) $tg\angle B_1TT_1 = tg\angle A_1D_1E$, т.к. $\angle B_1TT_1 = \angle A_1D_1E$, т.к. $B_1C_1 \parallel A_1D_1$ и $ED_1 \parallel TT_1$ (по постр.) $\Rightarrow B_1T_1 = B_1T = \frac{B_1C_1}{2} = 6$

5) Проведём $EE_1 \parallel AB$ до пересеч BB_1 в т. E_1, тогда AEE_1B – прям-угол. $\Rightarrow E_1B = 4$ (по св-ву) $\Rightarrow E_1T_1 = BB_1 - E_1B - T_1B_1 = 6$

6) Пусть $A_1B_1 = D_1C_1 = DC = AB = a$, тогда по т. Пифагора в $\triangle D_1TC_1$: $D_1T = \sqrt{a^2+36}$, а по т. Пифагора в $\triangle EE_1T_1$: $ET_1 = \sqrt{a^2+36}$

$\Rightarrow ET_1 = D_1T = \sqrt{a^2+36} \Rightarrow ET_1TD_1$ – трапеция ($ED_1 \parallel TT_1$ (постр))

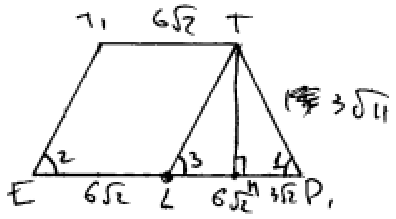
а так же ET_1TD – равнобед. трапеция, т.к. $ET_1 = D_1T$ ч.т.д.

б) 1) $ET_1 = \sqrt{(3\sqrt{7})^2+36} = 3\sqrt{11} \Rightarrow D_1T = 3\sqrt{11}$

2) По т. Пифагора в $\triangle EAD_1$: $ED_1 = \sqrt{12^2+12^2} = 12\sqrt{2}$

3) По т. Пифагора в $\triangle T_1B_1T$: $TT_1 = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$

4) Изобразим трапецию ET_1TD_1.



5) Проведём $TL \parallel ET_1$, так, что
$TL \cap ET_1 = L \Rightarrow T_1TLE$ – парал.
$\Rightarrow EL = TT_1 = 6\sqrt2$ (по св-ву)
$\Rightarrow LD_1 = ED_1 - EL = 6\sqrt2$

6) $\angle 3 = \angle 2$ ($ET_1 \parallel TL$ (по постр.) и $EL \parallel TT_1$ (по постр.)), а $\angle 1 = \angle 2$ (по св-ву равнобед. трапеции) $\Rightarrow \angle 1 = \angle 3 \Rightarrow \triangle LTD_1$ – равнобед.

7) Опустим высоту TH в $\triangle LTD_1$, TH – медиана и бис. (по св-ву)
$\Rightarrow HD_1 = 3\sqrt2$

8) В $\triangle HTD_1$. По Т. Пифагора $TH = \sqrt{TD_1^2 - HD_1^2}$
$TH = \sqrt{(3\sqrt{11})^2 - 9\cdot 2} = 9$

9) $S_{ET_1TD_1} = \frac{T_1T + ED_1}{2} \cdot TH = \frac{6\sqrt2 + 12\sqrt2}{2} \cdot 9 = 81\sqrt2$ Ответ: $81\sqrt2$

№19

а) Да. Пример: $\{2; 3; 58\}$,
$M_{<59}(\{2, 3; 58\}) = \frac{63}{3} = 21$; $M_{<59}(7, 8, 63) = \frac{15}{2} = 7,5$
$7,5 < 21$.

б) Да. Пример: $\{2, 58; 120\} = a$, $M_{<59}(a+5) = 7$;
$M_{<59}(a) = 30$, $M_{\geq 59}(a+5) = 94$; $M_{\geq 59}(a) = 120$
$7 < 30$ и $94 < 120$

<u>Ответ участника 2-й части комплексной диагностики по математике:</u>

Задания/Критерии	Балл	Ответ отсутствует
12	2	
13	1	
14	2	
15	0	
16		X
17		X
18	1	